

## Correction Devoir maison n°1

**Exercice 1**

1. On cherche tout d'abord le discriminant de  $x^2 - 2x + 5$ , à savoir  $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$ . On résout alors l'équation sur  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = x - 3 &\implies x^2 - 2x + 5 = (x - 3)^2 \\ &\implies x^2 - 2x + 5 = x^2 - 6x + 9 \\ &\implies 4x - 4 = 0 \\ &\implies 4(x - 1) = 0 \\ &\implies x = 1 \end{aligned}$$

On vérifie la solution  $x = 1$ . Or  $\sqrt{4} = 2 \neq -2$ . Donc 1 n'est pas solution de cette équation.

L'ensemble des solutions est  $\mathcal{S}_1 = \emptyset$ .

2. On résout l'inéquation suivante sur  $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} < \frac{2}{x+3} &\iff 0 < \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+3)} - \frac{x+3}{(x-1)(x+3)} \\ &\iff 0 < \frac{x-5}{(x-1)(x+3)} \end{aligned}$$

On résout alors l'équation à l'aide d'un tableau de signe.

$x$	$-\infty$	$-3$	$1$	$5$	$+\infty$
Signe de $x + 3$	-	0	+	+	+
Signe de $x - 1$	-	-	0	+	+
Signe de $x - 5$	-	-	-	0	+
Signe de $\frac{x-5}{(x-1)(x+3)}$	-	+	-	0	+

L'ensemble des solutions est  $\mathcal{S}_2 = ] - 3; 1[ \cup ] 5; +\infty[$ .

3. On résout l'équation

$$e^x \geq x + 1 \iff e^x - x - 1 \geq 0$$

On pose alors la fonction  $f : x \rightarrow e^x - x - 1$ . Cette fonction est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On a alors pour tout  $x$  réel

$$f'(x) = e^x - 1$$

Or  $f'(x) \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0$ . On a alors le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	$0$	$+$
Variations de $f$			

D'après le tableau de variations, on a pour tout  $x$  réel,  $f(x) \geq 0$ . On en déduit que  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x+1$ .

L'ensemble des solutions est donc  $\mathcal{S}_3 = \mathbb{R}$ .

4. Afin de résoudre l'équation  $|2x + 1| + |x - 2| = 4$ , on résout l'équation  $2x + 1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{2}$  et  $x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2$ . On a donc 3 cas :

(a) **Cas où  $x < -1/2$**  : L'équation s'écrit alors

$$\begin{aligned}
 |2x + 1| + |x - 2| = 4 &\iff -(2x + 1) - (x - 2) = 4 \\
 &\iff -3x + 1 = 4 \\
 &\iff -3x = 3 \\
 &\iff x = -1
 \end{aligned}$$

Le nombre  $-1$  appartient à l'intervalle  $] -\infty; -1/2[$  donc  $-1$  est une solution.

(b) **Cas où  $-1/2 \leq x < 2$**  : L'équation s'écrit alors

$$\begin{aligned}
 |2x + 1| + |x - 2| = 4 &\iff 2x + 1 - (x - 2) = 4 \\
 &\iff x + 3 = 4 \\
 &\iff x = 1
 \end{aligned}$$

Le nombre  $1$  appartient à l'intervalle  $[-1/2; 2[$  donc  $1$  est une solution.

(c) **Cas où  $2 \leq x$**  : L'équation s'écrit alors

$$\begin{aligned}
 |2x + 1| + |x - 2| = 4 &\iff 2x + 1 + x - 2 = 4 \\
 &\iff 3x = 5 \\
 &\iff x = 5/3
 \end{aligned}$$

Or  $5/3$  n'appartient pas à l'ensemble considéré.

Au final l'ensemble des solutions est  $\mathcal{S}_4 = \{-1, 1\}$ .

## Exercice 2

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - x - 1)e^x + e$$

On admet que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

1. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ . On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x - 1)e^x + (x^2 - x - 1)e^x \\ &= (x^2 + x - 2)e^x \end{aligned}$$

2. On étudie le signe du trinôme  $x^2 + x - 2$ . Le discriminant est alors  $\Delta = 1 - 4 \times (-2) \times 1 = 9$ . Le trinôme a donc deux solutions

$$x_1 = \frac{-1 - 3}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

On a donc le tableau de signe suivant

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+

3. Déterminez  $a$ ,  $b$  et  $c$  tel que  $f(x) = x^2 \left( a - \frac{b}{x} - \frac{c}{x^2} \right) e^x + e$ . En développant la formule de la fonction  $f$ , on obtient

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x + e$$

Par identification,  $a = 1$ ,  $b = -1$  et  $c = -1$ . Ainsi

$$f(x) = x^2 \left( 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) e^x + e.$$

4. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

On en déduit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 1$ . Enfin,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

D'après la règle de multiplication,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

5. On calcule  $f(-2) = 5e^{-2} + e$  et  $f(1) = -e + e = 0$ . On en déduit alors le tableau de variation

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+
Variations de $f$	0	$5e^{-2} + e$	0	$+\infty$	

6. D'après le tableau de variation précédent, 0 est un minimum de la fonction :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0.$$

### Exercice 3 - ECRICOME ECT 2011

On considère la fonction  $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$ .

1. On résout  $e^x + e^{-x} > 0$ . Or pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x > 0$  et  $e^{-x} > 0$ .

Donc le domaine de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}$ .

2. Le domaine de définition de  $f$  est symétrique. Pour tout  $x$  réel,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(e^{-x} + e^{-(-x)}) \\ &= \ln(e^x + e^{-x}) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

La fonction  $f$  est paire.

3. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x$  réel

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Or  $e^x + e^{-x} > 0$ , on s'intéresse alors au numérateur. On résout

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} \geq 0 &\iff e^x \geq e^{-x} \\ &\iff e^{2x} \geq 1 \\ &\iff 2x \geq 0 \\ &\iff \boxed{x \geq 0} \end{aligned}$$

On calcule les limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

De même

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Enfin,  $f(0) = \ln(e^0 + e^{-0}) = \ln(2)$ . On en déduit le tableau de variation suivant

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	$0$	$+$
Variations de $f$	$+\infty$	$\swarrow$ $\searrow$	$\swarrow$ $\searrow$ $+\infty$
		$\ln(2)$	

4. On calcule pour  $x$  réel,

$$\begin{aligned}
 f(x) - x &= \ln(e^x + e^{-x}) - x \\
 &= \ln(e^x(1 + e^{-2x})) - x \\
 &= \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-2x}) - x \\
 &= x + \ln(1 + e^{-2x}) - x \\
 &= \ln(1 + e^{-2x})
 \end{aligned}$$

5. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-2x} = 1$$

Finalement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-2x}) = 0.$$

On a également

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^{-2x} = +\infty$$


Finalement

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^{-2x}) = +\infty.$$

6. On a  $f(x) > x \iff f(x) - x > 0$ . On pose alors la fonction  $g(x) = f(x) - x$ . Cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de fonctions dérivables. Pour tout  $x$  réel,

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= f'(x) - 1 \\
 &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - 1 \\
 &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
 &= \frac{-2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 0
 \end{aligned}$$

La fonction  $g$  est donc strictement décroissante. les limites ayant été étudiés précédemment, on a le tableau de variation

$x$	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	
Variations de $g$	$+\infty$  $0$	

La fonction  $g$  est ainsi toujours positive. Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x.$$

7. On résout

$$\begin{aligned}
 f(x) < x + 1 &\iff \ln(e^x + e^{-x}) < x + 1 \\
 &\iff e^x + e^{-x} < e^{x+1} \\
 &\iff e^x - e \times e^x + e^{-x} < 0 \\
 &\iff (1 - e)e^x + e^{-x} < 0 \\
 &\iff (1 - e)e^{2x} + 1 < 0 \\
 &\iff -(e - 1)e^{2x} < -1 \\
 &\iff e^{2x} > \frac{1}{e - 1} \\
 &\iff 2x > \ln\left(\frac{1}{e - 1}\right) \\
 &\iff x > \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{e - 1}\right)
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc  $\mathcal{S} = \left] \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{e - 1}\right); +\infty \right[.$

8. Tracer sur un même graphique les courbes représentatives de  $f$ ,  $y = x$  et  $y = x + 1$ .

